Неархимедовы метрики в задачах моделирования витасистем*

Совместно с Г.М. Алакозом, С.И. Пляскотой

Введение

Иерархическое самоподобие витасистем [1] приводит к неудобству их описания с помощью традиционной числовой математики. Причем это «неудобство» имеет принципиальный характер, поскольку архимедов подход использует принцип линейного шкалирования, который приспособлен для классической физики и инженерных приложений, но не приспособлен для «естественного» моделирования иерархических, самоподобных структур и разрывных процессов. Альтернативой архимедову является ультраметрический подход, ставший в последние годы особенно популярным в задачах математической физики, биологической математики, моделировании процессов мышления [2,3,4]. В статье показан потенциал ультраметрического подхода в задачах моделирования иерархических витасистем общего вида, свойства которых зависят не только от «плавных», но и от «скачкообразных» изменений их характеристик.

1. Особенности неархимедовых метрик

Любая *норма*, *расстояние* или *метрика* между x и y есть функция, $\rho(x, y) = |x - y| = |a|$, заданная на интервале $a = x - y$ и характеризующаяся следующими свойствами:

(1) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

(2) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ – свойство мультипликативности;

(3) $|a + b| \leq |a| + |b|$ – известно, как неравенство треугольника.

Классическая архимедова метрика основана на геометрическом принципе измерения расстояний в поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ и состоит в линейной соизмеримости величин, т.е. справедлива аксиома Архимеда [2]:

Для двух положительных вещественных величин $a < b$; $a, b \in \mathbb{R}$, всегда найдется такое натуральное $n, n \in \mathbb{N}$, которое обеспечит выполнение неравенства

(4) $(n - 1)a < b < na$.

Аксиома Архимеда и соответствующая ей метрика лежит в основе физической теории измерений. Для нее характерна естественная норма в виде абсолютной величины числа.

В случае, если (4) невыполнимо, а именно, за ограниченное число n шагов длиной a не удается преодолеть «расстояние» b, метрика является неархимедовой. К числу таковых, в частности, относится ультраметрическая норма. Ее атрибутивными свойствами являются (1), (2), а вместо (3) используется усиленное неравенство треугольника

(3’) $|a + b| \leq \max(|a|, |b|)$.

Ультраметрическая норма удовлетворяет общему определению нормы, так как усиленное неравенство треугольника не противоречит (3), т.е. $|a + b| \leq \max(|a|, |b|) \leq |a| + |b|$.

По определению [4] метрическое пространство $\mathbb{M}_\rho$, наделенное ультраметрикой $\rho_m(x, y) = |x - y|_m$, обладающей свойствами (1), (2), (3’), называется ультраметрическим $\mathbb{M}_{\rho_m}$.

Основными его особенностями являются [4]:

– все треугольники в $\mathbb{M}_{\rho_m}$ являются равнобедренными, т.е. для любого треугольника длины двух сторон равны, причем, основание не превышает длины боковых сторон;

---

* Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD’2016) «Management of Large-scale System Development» (MLSD'2016): труды Девятой междунар. конф., 03-05 окт. 2016 г., Москва: в 2 т.– Т. 1. – М.: ИПУ РАН, 2016. с.247-254.

– любые два шара в $\mathbb{M}_{\rho_m}$ либо не пересекаются, либо один содержится в другом (шар радиуса R с центром в точке x_0 есть множество точек, удаленных от точки x_0 на расстояние не более R);
– любая точка ультраметрического шара (включая его границу) является его центром, т.е. шары являются одновременно замкнутыми и открытыми (*clopen* – от англ. *closed*, *open*);
– в пространстве $\mathbb{M}_{\rho_m}$ нельзя уйти от точки x_0 на расстояние более R, делая шаги, не превышающие R.

Эти свойства наглядно отражают естественную иерархическую природу ультраметрических пространств, в которых *иерархия* определяется делением шаров на подшары, а *расстояния* от внешних до внутренних точек шаров зависит исключительно от места шаров в их иерархии.

Непосредственным представителем ультраметрического пространства оказывается поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ с одноименной нормой.

В соответствии с [4] p-адической нормой любого рационального числа

(5) $x = \frac{m}{n} p^{\gamma}$

называется число

$|x|_p = p^{-\gamma}$,

где m, n, p – взаимно простые числа, $n \in \mathbb{N}$ – натуральное, m, γ – целые числа.

Иными словами, p-адическая норма обратно пропорциональна степенной функции простого p, входящего в справедливое для любого $x \in \mathbb{Q}$ разложение вида (5) на взаимно простые сомножители. В дальнейшем p будем назвать основанием соответствующей нормы.

Согласно теореме Островского [5] существует лишь два способа пополнения поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (непосредственно доступных в реальном физическом эксперименте) – либо до поля вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо до поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Вопрос о выборе простого числа для построения адекватных моделей в большинстве приложений всегда открыт, что делает актуальным применение «компромиссной» адельной системы координат, содержащей как вещественную, так и *все* p-адические системы координат.

В дополнение к (1, 2, 3') и к характеристикам ультраметрического пространства p-адическая норма характеризуется следующими свойствами [4]:

- для $\gamma > 0$ $|x|_p \leq 1$ и $|x|_p \underset{\gamma\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т.е. p-адическая норма падает с возрастанием степени p;

- $\forall (x \in \mathbb{Q}, x \neq 0) \colon \prod_p |x|_p = 1$, т.е. для любого ненулевого рационального x справедлива адельная формула, где произведение берется по всем простым p, включая $p = \infty$, соответствующему вещественной норме;

- p-адические числа находятся во взаимно однозначном соответствии со сходящимися в p-адической норме рядами вида

(6) $x = p^{\gamma} \sum_{i=0}^{\infty} x_i\, p^i = \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_i\, p^i, x_i = 0, \dots, p-1,$

где γ – целое.

Формула (6) есть аналог разложения вещественного числа в бесконечную десятичную дробь и её можно считать за определение p-адического числа [5].

Если для построения ультраметрической нормы использовать непростое p, то, строго говоря, нарушается свойство мультипликативности нормы, а именно, согласно [2] вместо (2) выполняется более слабое условие $|a \cdot b|_m \leq |a|_m \cdot |b|_m$, где m – произвольное целое, что дает основание говорить лишь о псевдонорме. Кроме того, не всегда выполнима операция деления. Это позволяет при выборе произвольного целого m в качестве основания нормы говорить о кольце (но не поле) m-адических чисел $\mathbb{Q}_m$ [2].

2. Ультраметрическое моделирование витасистем

Витасистемы [1] характеризуются симметрией информационных связей между категориями и фрактальной, а, следовательно, иерархической структурой с элементами «произвольной сложности». Пример структуры витасистем приведен на рис. 1-а. Исходя из канонической модели *развития*, для ее описания удобно выбрать p-адическую метрику с основанием p = 5 (см. рис 1-б). В качестве параметров, входящих в описание витасистем, целесообразно рассматривать качество соответствующей категории [6] либо один из ресурсов, циркулирующий между категориями. В любом из вариантов необходимо определить диапазоны и уровни изменения параметров (переменных) модели.

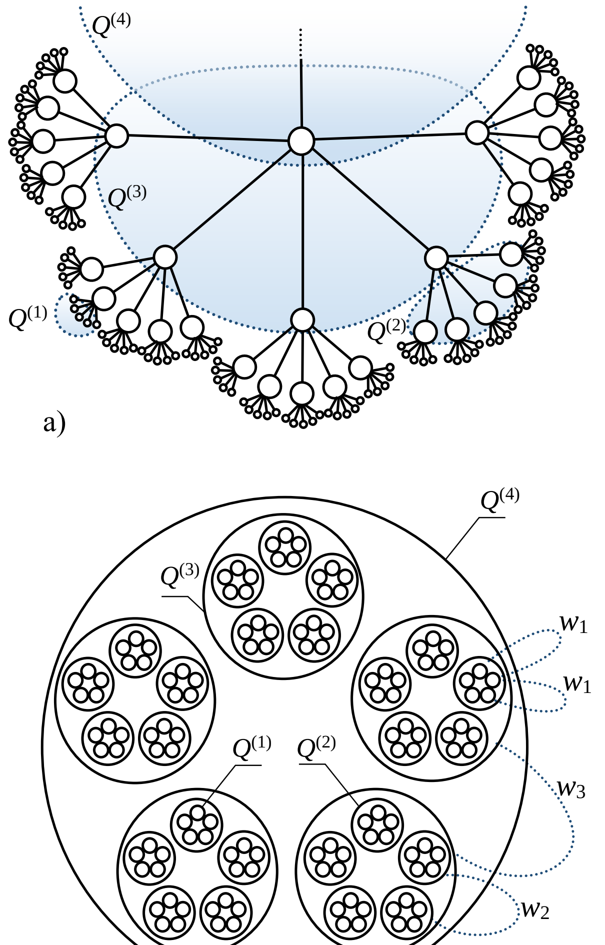


Рисунок 1. Графическая интерпретация фрактальной структуры витасистем общего вида:

а) пример иерархии канонических витасистем (внутренние связи между категориями витасистем не показаны); б) соответствующая структура витасистемы в виде 5-адических шаров.

Для моделирования витасистем могут быть заданы дискретные пороги уровней переменных. В частности, целесообразно задать пять порогов энергетического состояния категориальных переменных, например, такие как: (1) сильно недовозбужденный, (2) недовозбуженный, (3) возбужденный, (4) перевозбужденный и (5) сильно перевозбужденный (сильно недовозбуженный может быть ассоциирован с отсутствием возбуждения, т.е. таким состоянием, при котором по рассматриваемой переменной идентифицируется «отказ», «исключение из рассмотрения» или «гибель» соответствующей категории витасистемы).

В общем случае, естественно предположить, что вещественнозначные параметры качества (энергетического состояния) категорий модели витасистемы принимают случайные значения на множестве иерархических порогов, которое в дальнейшем будем обозначать как

$$\boldsymbol{Q}^{(L)} = \left\{Q^{(l)} = \left[q_j^{(i_l k_l)}, j = \overline{1,5}, i_l = 1,2, \dots, k_l = \overline{1,5}\right], l = \overline{1, L}\right\},$$

где $q_j^{(i_l k_l)}$ – j-й уровень i-го показателя качества (энергетического состояния) k-й категории;

L – число уровней витасистемной иерархии.

Исходя из такой постановки, приближённое поведение витасистем может быть рассмотрено как случайное блуждание на сложных иерархических ландшафтах, в которых и качество витасистемы, и уровни ее иерархии возможно описать с помощью однородной (в смысле выбора основания) 5-адической метрики. Постановке и решению подобных задач посвящен метод межбассейновой кинетики (*interbasin kinetics*), который нашел распространение в задачах изучения динамики белковых молекул.

Подчеркнем, что в задаче моделирования витасистем «дерево бассейнов» само по себе отражает иерархию витасистем и не связано с выполнением дополнительных требований к мощности локальных энергетических минимумов, что предусматривалось в первоначальной постановке задачи моделирования белков.

Каноническое представление общей модели витасистемы и указанная шкала качества витасистем делают очевидным для оценки расстояний между уровнями качества витасистем введение 5-адической нормы, т.е.

$$x = |a - b|_5, a, b \in \boldsymbol{Q}^{(L)}.$$

В дискретном случае динамика витасистемы может быть описана ультраметрическим случайным блужданием [4] – однородным марковским процессом, переходная вероятность которого между конечным набором состояний, нумеруемых индексами a, $f_a(t), a = \overline{1, p^L}$, подчинена кинетическому уравнению случайного блуждания на ультраметрической дискретной решетке (уравнению Колмогорова-Феллера) стандартного вида

$$(7)\quad \frac{\partial}{\partial t} f_a(t) = \sum_b [w_{ab} f_b(t) - w_{ba} f_a(t)] = \sum_{a \neq b} w_{ab} f_b(t) - \sum_{b \neq a} w_{ba} f_a(t),$$

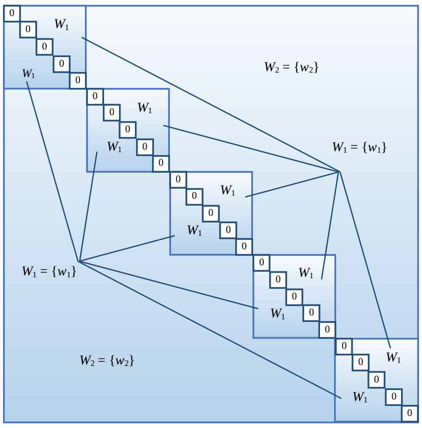
где w_{ab} – элементы матрицы вероятностей переходов между парами узлов, имеющей вид блочно-иерархической матрицы Паризи **W** [7] порядка $p^L \times p^L$.

Пример структуры матрицы Паризи **W** порядка $5^2 \times 5^2$ приведен на рисунке 2. Видно, что ее элементы сгруппированы по блокам, соответствующим двум уровням витасистемной иерархии, $w_l = (k_l T_l)^{-1} = const > 0, l = 1,2,$ – обратно пропорциональных величине «кинетической энергии» (текущего качества, расхода ресурса и т.п.), необходимой для преодоления порога внутри l-го уровня иерархии. Величины $T_{1,2}$ рассматриваются как аналоги температуры в модели теплопроводности, принятой в качестве прототипа; $k_1 < k_2$ – нормировочные коэффициенты.

В простейшем случае, если построчно нормировать элементы блочной матрицы Паризи к единичной сумме, ее элементы примут вид p-адических вероятностей:

$$(8)\quad w_{ab} = w_l = w_{l_p \text{ норм}}^{(L)} = \frac{p}{L(p-1)p^l} = \frac{1}{L(p-1)p^{l-1}}.$$

В этом случае уравнение (7) может быть приведено к виду



а)

0	w_1	w_1	w_1	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_1	0	w_1	w_1	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_1	w_1	0	w_1	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_1	w_1	w_1	0	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_1	w_1	w_1	w_1	0	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	0	w_1	w_1	w_1	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	0	w_1	w_1	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	w_1	0	w_1	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	w_1	w_1	0	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	w_1	w_1	w_1	0	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	0	w_1	w_1	w_1	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	0	w_1	w_1	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	w_1	0	w_1	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	w_1	w_1	0	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	w_1	w_1	w_1	0	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	0	w_1	w_1	w_1	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	0	w_1	w_1	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	w_1	0	w_1	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	w_1	w_1	0	w_1	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	w_1	w_1	w_1	0	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	0	w_1	w_1	w_1	w_1
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	0	w_1	w_1	w_1
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	w_1	0	w_1	w_1
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	w_1	w_1	0	w_1
w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_2	w_1	w_1	w_1	w_1	0

б)

Рис. 2. Пример структуры (а) и аналитического выражения (б) матрицы Паризи для вероятностей переходов двухуровневой витасистемы (p=5, L =2)

(9) $$\frac{\partial}{\partial t} f_a(t) = \sum_{l=1}^{L} w_{l_{p\ \text{норм}}}^{(L)} \left[\sum_{\substack{b \in W_l \\ b \neq a}}^{p^l} f_b\,(t) - (p-1)p^{l-1} f_a\,(t) \right].$$

Ниже, в качестве примера, приведена система из 25 обыкновенных дифференциальных уравнений для двухуровневой витасистемы.

(10)

$$\begin{cases} \dot{f}_1(t) = w_1[f_2(t) + f_3(t) + f_4(t) + f_5(t) - 4f_1(t)] + w_2[f_6(t) + \cdots + f_{25}(t) - 20f_1(t)]; \\ \dot{f}_2(t) = w_1[f_1(t) + f_3(t) + f_4(t) + f_5(t) - 4f_1(t)] + w_2[f_6(t) + \cdots + f_{25}(t) - 20f_2(t)]; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{f}_{25}(t) = w_1[f_{21}(t) + f_{22}(t) + f_{23}(t) + f_{24}(t) - 4f_{25}(t)] + w_2[f_1(t) + \cdots + f_{20}(t) - 20f_{25}(t)], \end{cases}$$

где w_1 = 1/8; w_2 = 1/40.

На рис. 3 приведены графические результаты решения системы (10) для различных начальных условий и при наличии внешних воздействий различного рода (моделировались гармонические флюктуации с различными частотами).

Из графиков следует устойчивость p-адических моделей витасистем и их ожидаемая нечувствительность к внешним воздействиям.

При моделировании использовался пакет компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*, ориентированный на символьные вычисления.

а)

б)

в)

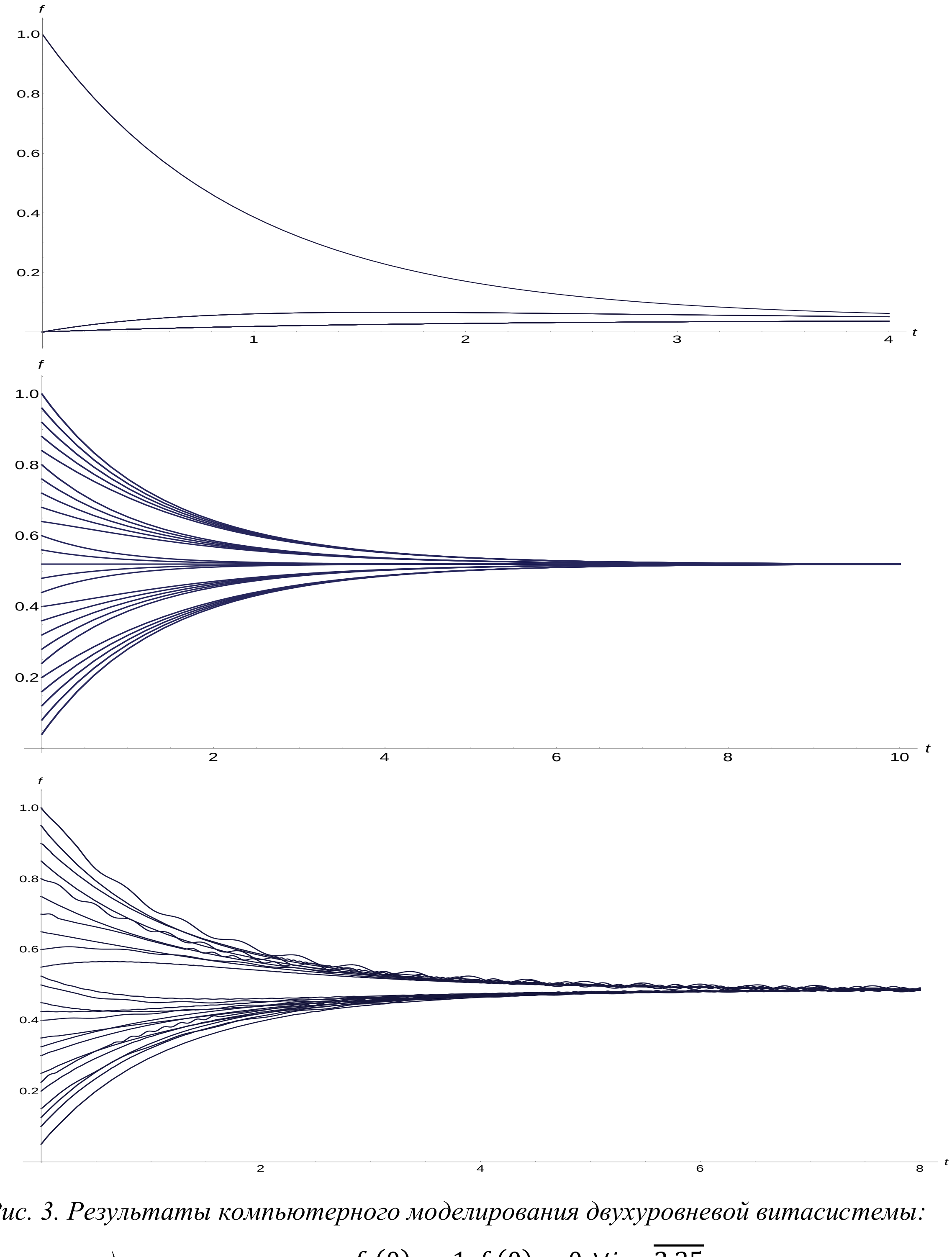


Рис. 3. Результаты компьютерного моделирования двухуровневой витасистемы:

а) начальные условия: $f_1(0) = 1, f_i(0) = 0, \forall i = \overline{2,25}$;

б) начальные условия: $f_1(0) = 0, f_i(0) = f_{i-1}(0) + .04.$;

в) начальные условия: $0 < f_i(0) \leq 1 - var, \forall i = \overline{1,25}$.

Выводы

1. Анализ структурно-информационных связей в иерархических витасистемах дает основания допустить, что:

а) пространство состояний витасистем ультраметрично,

б) вероятность перехода между состояниями локально постоянна,

в) ее величина зависит только от уровня иерархии витасистемы.

2. Известные модели термодинамического равновесия можно распространить на моделирование иерархических витасистем общего вида, используя структурно-параметрические методы хранения и преобразования информации [1,8], неархимедову (ультраметрическую) норму и/или адельные системы координат [2–5].

3. Следует признать, что с помощью p-адической метрики удалось описать лишь структуру связей графа витасистемы. Изменение параметров качества витасистем моделировалось в традиционной метрике на поле вещественных чисел, что, с одной стороны, соответствует основным подходам в применении p-адических чисел к моделированию систем [9,10] и, с другой стороны, требует дальнейших исследований в области применения p-адического анализа для моделирования реальных систем.

Литература

1. *Алакоз Г.М., Аюпов А.И., Нестеров В.А., Обносов Б.В., Пляскота С.И., Староватов О.П. Трусов В.Н.* Витасистемы: модели инженерного творчества/Под ред. Г.М Алакоза. М.: «Дашков и К°», 2015.
2. *Хренников А. Ю.* Неархимедов анализ и его приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 216 с.
3. *Хренников А. Ю.* Моделирование процессов мышления в p-адических системах координат.. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 296 с.
4. *Волович И.В., Козырев С.В.* p-адическая математическая физика: основные конструкции, применения к сложным и наноскопическим системам. 2008.
5. *В.С.Владимиров, И.В.Волович, Е.И.Зеленов.* Р-адический анализ и математическая физика. М.: Физматлит, 1994. 352 с.
6. *Пляскота С.И.* Модели жизненного цикла витасистем большого масштаба в задачах их мониторинга // В кн.: Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2011) Материалы Пятой международной конференции (3-5 октября 2011 г., Москва, Россия). Том II. М: : Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, 2011.
7. *Parisi G.* Infinite number of order parameters for spin-glasses. Phys. Rev. Lett. — 1979.— Vol. 43.—P. 1754—1756.
8. *Алакоз Г.М.* Структурно-параметрический метод хранения и преобразования информации в молекулярной биологии и супрамолекулярной вычислительной технике. Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2007. С. № 5, с. 54–61 и № 7, с. 51–65.
9. *V.A.Avetisov, A.H.Bikulov, S.V.Kozyrev, V.A.Osipov*. p–Adic Models of Ultrametric Diffusion Constrained by Hierarchical Energy Landscapes,» J. Phys. A: Math. Gen., V.35. N.2. 2002. pp. 177–189.
10. *Сизова О.М.* Метод решения p-адического уравнения Колмогорова—Феллера для ультраметрического случайного блуждания в центрально-симметричном внешнем поле. Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 2, с. 197—207.